Pro $z \in \mathbb{C}$ definujeme

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Křivkový integrál v $\mathbb{C}$

Budeme uvažovat křivky $\gamma : I \to \mathbb{C}$, kde I je interval. Tedy

$$\gamma(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$$

pro nějaké funkce $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$. Její derivaci $\gamma'(t)$ definujeme jako

$$\gamma'(t) = \varphi'(t) + i\psi'(t).$$

Všechny typy křivek (C^2, regulární, prosté,...) definujeme alalogicky jako v $\mathbb{R}^2$. Stejné tak i délku křivky.

Pro funkci $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ definujeme integrál

$$\int_a^b f = \int_a^b u + i \int_a^b v.$$

Definice 1 (křivkový integrál v $\mathbb{C}$). *Nechť $\gamma : I \to \mathbb{C}$ je křivka a $f : \mathbb{C} \supset A \to \mathbb{C}$ je definovaná na $\langle\gamma\rangle$. Potom definujeme integrál z f přes křivku γ jako*

$$\int_\gamma f = \int_I (f \circ \gamma)\gamma',$$

pokud má integrál napravo smysl (jako Lebesgueův, případně ale i Newtonův).

Lemma 2 (křivkový integrál v $\mathbb{C}$ jako křivkový integrál 2. druhu). *Je-li $f = u + vi$, potom*

$$\int_\gamma f = \int_\gamma (u, -v) \cdot \vec{ds} + i \int_\gamma (v, u) \cdot \vec{ds},$$

je-li integrál nalevo definován.

Lemma 3 (odhad křivkového integrálu). *Platí*

$$\left| \int_\gamma f \right| \leq 4 \cdot l(\gamma) \cdot \sup_{z \in \langle\gamma\rangle} |f(z)|.$$

Definice 4 (primitivní funkce). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f, F : \Omega \to \mathbb{C}$ jsou funkce. Funkci F nazveme primitivní funkcí k f na Ω, pokud platí*

$$F'(z) = f, \quad z \in \Omega.$$

Lemma 5 (výpočet křivkového integrálu pomocí primitivní funkce)**.** *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je otevřená,* F *je primitivní funkcí k* f *na* Ω*,* f *je spojitá na* Ω *a* $\gamma : [a,b] \to \Omega$ *je po částech hladká křivka. Potom*

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Definice 6 (křivková souvislost)**.** *Množinu* $A \subset \mathbb{C}$ *nazveme křivkově souvislou, pokud pro každá* $a, b \in A$ *exdistuje spojitá křivka* $\gamma : [\alpha, \beta] \to A$*, pro kterou platí* $\gamma(\alpha) = a$ *a* $\gamma(\beta) = b$*.*

Oblastí budeme nazývat otevřenou, křivkově souvislou množinu.

Věta 7. *Nechť* $\Omega \subset C$ *je oblast a* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *je funkce, potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. f *má na* Ω *primitivní funkci*
2. $\displaystyle\int_\gamma f = \int_\kappa f$*, pro libovolné dvě křivky* $\gamma : (a,b) \to \Omega$*,* $\kappa : (\alpha, \beta) \to \Omega$*, pro kterép latí* $\gamma(a) = \kappa(\alpha)$*,* $\gamma(b) = \kappa(\beta)$*.*

Věta 8. *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je otevřená a* $\partial\Omega$ *lze popsat jako prostou, po částech regulární křivku* γ*. Nechť dále* $\overline{\Omega} \subset A$ *a* $f \in H(A)$*, potom*

$$\int_\gamma f = 0$$